PROGRAMAS OFICIALES

DE

SEGUNDA ENSEÑANZA

PARA

LOS INSTITUTOS NACIONALES DE COSTA RICA

SEGUNDO AÑO

I. *Álgebra.*
II. *Geografía.*
III. *História.*
IV. *Latín.*
V. *Francés.*
VI. *Castellano.*

SEGUNDA ENSEÑANZA.

SEGUNDO AÑO.

Ciencias y Letras.

Programa de Algebra.

1. Álgebra. Objeto de esta ciencia. Símbolos propios del Álgebra. Brevedad y generalidad del lenguaje algebraico.

2. Dar la resolución aritmética y algebraica de los problemas siguientes:

1º—Un hacendado tenía 217 animales en tres potreros; el primero contenía dos veces más que el tercero, y el segundo dos veces más que el primero. ¿Cuántos había en cada uno?

2º—Las ganancias de una fábrica se duplican cada año; si al fin de cuatro años suben á $ 15000, ¿cuál fué la ganancia del primer año?

3º—Tres comerciantes reunen un capital social de $ 6000: A puso tres veces más que C, y B la mitad de lo que dieron A y C. ¿Cuánto dió cada uno?

4º—Dividir el número 20 en tres partes tales, que el exceso de la mediana sobre la menor sea 2, y 4 el exceso de la mayor sobre la mediana.

3. Denominación de las varias formas de las expresiones algebraicas: coeficiente, exponente, fórmula. Traducir al lenguajc ordinario las siguientes expresiones:

$$a^2 + 3\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$4\,[a + b] - c.$$

$$\sqrt{a + \sqrt{2b + c}}.$$

$$\frac{x + 4\,[x - 3y].}{2\sqrt{4x - z}}$$

$$\frac{\sqrt{a} + x + y^2}{\sqrt{a} - [x + y]}$$

$$\frac{3x + y^2 - \sqrt{xy}}{4y^2 - z + 2xy^2}$$

$$\sqrt{a + b} + x^2 - 4$$

4. Valor numérico de una expresión algebraica. De las cantidades consideradas como positivas y negativas. Teoremas: 1º—Toda cantidad negativa es menor que cero; 2º—De dos cantidades negativas la menor es aquélla cuyo valor absoluto es mayor.

5. Siendo $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$, $e = 5$, determinar el valor de las siguientes expresiones:

$$[a + b]\, d - c.$$

$$[a + b]\, [d - c].$$

$$a + b \times d - c.$$

$$[a^2 + b^2] : [a + b].$$

$$\sqrt{5c} + a + \frac{3b}{2}.$$

$$\left[\frac{a}{2} + \frac{c}{2}\right] d.$$

$$a + 3\sqrt{2e + \sqrt{4e + 3d + 2b}}$$

$$[a + b]\, [b - a]\, 4a.$$

6. Operaciones con los números negativos. Ventajas de la admisión de las cantidades negativas.

7. Grado de los monomios. Polinomios ordenados. Expresiones equivalentes. Términos semejantes y su reducción.

8. Objeto y práctica de la suma y resta algebraicas.

9. Ejercicios sobre reducción de términos semejantes.

1] $3x^2y + 3xy - 3z + 6xy - 6x^2y + 2z - 3xy + 6z - 4z.$

2] $a + 6b + 3c - 4a + 3c + 3a - 6b + d + 2c - 3a + 7d.$

3] $9a^2b^2 - 3c^3y^3 + 2d^2\, 4c^3y^3 + 4a^2b^2 - 3d^2 + 2d^2 - 3a^2b^2.$

Ejercicios de suma:

1] $3[x + y],\ 4[x + y],\ 9[x + y],\ -10[x + y],\ -3[x + y].$

2] $2\sqrt{xy},\ 2\sqrt{xy},\ 3ab + 7 - \sqrt{xy},\ -11ab,$

3] $5[a-b]^2 + 3[x-y]^2.\ 4[x-y]^2, -2[a-b]^2,\ 7[a-b]^2 - 3[x-y]^2,$
$5[x-y]^2 - 3[a-b]^2.$

Ejercicios de resta:

1] De $3x^{2n} - 2x^{3n}y^m - y^{m-1}$ restar $3y^{m-1} + 2x^{3n}y^m - 4x^{2n}.$

2] De $5\sqrt{a + b^2} - 3\sqrt[3]{x + y}$ restar $6\sqrt[3]{x + y} - 7\sqrt{x + y}.$

3] De $7ar^2 - 4bs^3 + 3rs$ restar $-3ar^2 + p + 2bs^3 + 7.$

Desarrollo de paréntesis:

1] $3xy + 2x^3y - [4xy - x^3y + x^2].$

2] $3x^2 - [d + 2a + [3b - 2c + d] - 4a - 2b].$

3] $-\{3ax - [2xy + 3z] + z - [4xy + [3ax + 6z] + 3z]\}$

Resolver las ecuaciones siguientes:

1] $3x + 4x + 2x - 3x - 2x + 4x = 16.$

2] $11x - 3x + 7x - 4x + 6x - 3x = 23 + 7 - 2.$

3] $10x - 4x + 2x + 7x - 6x + 2x = 35 + 6 + 3.$

4] $25 - 10 = 24 + 3x - 15.$ $3x = 25 - 10 - 24 + 15$ $x = \frac{25 - 10 - 24 + 15}{3}$

5] $10x - 3x = 13 + 4x + 38.$ $7x - 4x = 13 + 38$

6] $3x - 6 = x + 14 - 4.$ $x = \frac{13 + 38}{3}$

10. Multiplicación algebraica. Multiplicación de monomio por monomio. Regla de los signos, coeficientes, exponentes y letras en la multiplicación de monomios.

11. Ejercicios de multiplicar:

1] $4a^2x^2y^2 \times -3y^2z^2.$

2] $4[a + b] \times -3.$

3] $2[x + y + z]^4 \times -5[x + y + z]^3.$

4] $3x^n \times 4x^n.$

5] $-4\,x^n\,y^m \times -5\,x^m\,y^n$.

6] $-3\,a^n\,x^n \times -5\,a^{2n}x^{3n}$.

7] $a^m \times a^n \times a^p$.

8] $3\,a^3\,x^4 \times -4\,a^2\,b\,x^2 \times -2\,a^3\,b^2\,x^7\,y^2$.

12. **Multiplicación de un monomio por un** polinomio. Multiplicación de polinomio por polinomio. Número de términos del producto.

13. Ejercicios de multiplicación:

1] $[6\,x^2\,y^2+4\,y^2-6\,z^2] \times 3\,x\,y^2$.

2] $[5\,a\,c-6\,a\,x+4\,a\,b] \times -5\,a\,c\,x$.

3] $-a\,b\,c\,d \times [5\,a\,b\,c-3\,a\,c\,d-3\,b\,c\,d]$.

4] $-2\,a\,x^2 \times [3\,a^2\,x\,y-2\,a^2\,b\,c+4\,a\,x\,y]$.

5] $[a+b] \times [a-b]$.

6] $[a^m+b^m] \times [a^m-b^m]$.

7] $[a^{m-n}+b^{m-n}] \times [a^{m-n}-b^{m-n}]$.

Resolución de las ecuaciones siguientes:

1] $5\,[x-3]=2\,[x+3]+3$.

2] $3+7\,[x-2]-4\,[2\,x-7]=16+[x-2]$.

3] $3\,[x-7]=14+2\,[x-10]+2$.

14. Multiplicación de polinomios ordenados. Abreviación para efectuar el producto de varios factores binomios, cuyo primer término sea igual en todos.

15. División. Reglas de la división de monomios. Casos en que la división es inexacta. Significación del exponente cero. Significación del exponente negativo.

16. Efectuar las divisiones siguientes:

1] $-25\,x^2\,y^2\,z^3 : 5\,x\,y\,z^2$.

2] $20\,a^5\,b^5\,c : 10\,a\,b\,c$.

3] $2\,[x+y] : 2$.

4] $[a\,[b+c]^2+b\,[b+c]^3] : -[b+c]$.

5] $[5\,[x+z]^3-10\,[x+z]^4] : -5[x+z]$.

6] $[v^2\,y-2\,y^2+3\,v^2\,y] : v\,y$.

7] $12\,x^{-3}\,y^{-4} : x^{-5}\,y^7$.

8] $30\,x^5\,[7+z]^2 : 5\,x^2\,[y+z]^2$.

Resolver las ecuaciones y problemas siguientes:

1] $a\,x+4=a^2-2\,x$.

2] $5\,a\,x=15\,a^3-5\,a\,b+5\,a\,b^2+2\,b\,x-6\,a^2\,b+2\,b^2-2\,b^3$.

3] $a\,x+b\,x=5\,a^2+7\,a\,b+2\,b^2+5\,a\,c+2\,b\,c-c\,x$.

Problema: La suma de dos números es 137, la diferenciá 43. ¿Cu ál será cada uno de estos números?

Problema: Un capitán ofrece á los soldados de su compañía, compuesta de 100 hombres, 4 pesos por cada vez que den en el blanco; pero que han de dejar en el fondo de la compañía 1 peso por cada vez que no den. Después de hacer dos disparos cada soldado, se halló que el capitán debía entregarles 500 pesos. ¿Cuántas veces dieron en el blanco y cuántas no?

Problema: Un padre tenía 41 años, su hijo 8. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será cuádrupla de la del hijo?

17. División de polinomios. Regla y demostración del procedimiento que debe seguirse al efectuar una división de polinomios. Casos en que la división de polinomios es inexacta.

18. Ejercicios de división:

1] $[x^4-3\,x^3-36\,x^2-71\,x-21] : [x^2-8\,x-3]$.

2] $[x^4-y^4] : [x-y]$.

3] $[x^4-81\,y^4] : [x-3\,y]$.

Buscar el factor común en los términos de las expresiones siguientes:

1] $5\,a^2\,b+6\,a^2\,c$.

2] $4\,x^2\,y+c\,x\,y+3\,x\,y$.

3] $a^2\,x^n\,y^n\,z+a\,x^n\,y\,z^n+a^2\,x^n\,y^2\,z^3$.

Desconiponer en dos factores los trinomios siguientes:

1] $81\,x^2-18\,a\,x+a^2$.

2] $4a^{2n}+12a^n b^n+9^{2n}$.

3] $1-2x^2+x^4$.

19. División por columnas cuando en un polinomio figuran varios términos afectados con un mismo exponente. Teorema: Si un polinomio entero en x, ordenado por las potencias decrecientes de x, se divide por el binomio $[x-a]$, el residuo de la división es el mismo polinomio dividendo, cambiando x por a. Corolario: Si un polinomio entero, $A x^m + B x^{m-1} + C x^{m-2} + \ldots \ldots + K x + L$, se reduce á cero poniendo en vez de x el valor a, dicho polinomio es divisible por $x-a$, y no lo es en el caso contrario.

20. Efectuar las divisiones siguientes:

1] $[a b x^3 - a b^2 x^4 - 2a^3 x^3 - 4cx + 12a^2 c x^2 + 6a^4 x^4 + 4b^2 c x^2 + 2a^2 b^2 x^4$
$- 3a^3 b x^4] : [2a^2 x^2 + 4c - a b x^2]$.

2] $[x^m - a^m] : [x-a]$.

3] $[\frac{3}{2} a^3 - \frac{5}{4} a^2 - 8a + 9] : [\frac{1}{2} a - 1]$.

Problema: Encontrar un número cuyo duplo aumentado en 24 unidades, exceda á 80 en lo mismo que 100 exceda al número buscado.

21. Fracciones algebraicas. Teoremas: 1º—Si el numerador de un quebrado, cuyos términos son positivos, crece ó disminuye, el quebrado crece ó disminuye; 2º—Si el denominador de un quebrado, cuyos dos términos son positivos, crece ó disminuye, el quebrado disminuye ó aumenta; 3º—Si los dos términos de una fracción algebraica se multiplican y dividen por una misma cantidad, no se altera el valor de la fracción. Reducción de fracciones algebraicas á un común denominador. Adición, sustracción, multiplicación y división de quebrados literales y expresiones mixtas.

22. Ejercicios sobre las fraccianes literales:

1] Sumar $a + \frac{1}{a^2-b^2}$ con $2a - b + \frac{1}{[a-b]^2}$

2] Sumar $\frac{1+x}{1+x+x^2}$ con $\frac{1-x}{1-x+x^2}$

3] De $6x + \frac{2a-3b}{5a}$, restar $3x - \frac{3a+2b}{6a}$

4] De $7x + \frac{2x}{y}$, restar $3x - \frac{x-3z}{y}$

5] Multiplicar $\frac{x^2+x-2}{x^2-7x}$ por $\frac{x^2-13x+42}{x^2+2x}$

6] Multiplicar $\frac{a}{x+a} - \frac{x}{x-a}$ por $\frac{x}{a} - \frac{a}{x}$

7] Dividir $\frac{x^4-y^2}{a+xy}$ por $\frac{abc[x^2-y]}{a^2x^2-x^4y^2}$

8]. Dividir $x^2 + \frac{y}{x}$ por $y + \frac{x}{y}$

Resolver las ecuaciones siguientes:

1] $3x - \frac{x}{6} + \frac{x}{12} = 70$

2] $\frac{3x}{4} - a - \frac{x}{5} = a + \frac{x}{5} + 5\frac{1}{2}$

3] $\frac{2x+4}{3} - 3\frac{1}{3} = \frac{x-3}{4} + \frac{x+2}{3}$

Problema: En una población invadida por la peste han muerto la décima parte de sus habitantes, la vigésima se hallan enfermos y la trigésima convalecientes: si hubiesen sido invadidos 100 individuos más, hubieran sido atacados la mitad de sus habitantes. ¿Cuál era el número de éstos antes de la invasión?

23. Determinación del m. c. d. y m. m. c. de los monomios. Reducción de quebrados á común denominador, empleando el m. m. c. Simplificación de fracciones.

24. Reducir las fracciones siguientes á sus menores términos:

1] $\frac{22a^5x^2yz^4}{33a^4x^2y^2z^2}$

2] $\frac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$

3] $\frac{x^2-3x-28}{x^2-11x+28}$

4] $\frac{6a^3-6a^2y+2ay^2-2y^3}{12a^2-15ay+3y^2}$

Reducir las siguientes fracciones á común denominador empleando el m. m. c.

1] $\frac{x+y}{x-y}$, $\frac{x-y}{x+y}$, $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

2] $\dfrac{x^2 y}{a+b}$, $\dfrac{x y}{a-b}$, $\dfrac{x y^2}{a^2-b^2}$

3] $\dfrac{x+2}{x-1}$, $\dfrac{x-2}{x+1}$, $\dfrac{x+3}{x^2-1}$

Problema: Un comerciante tenía una pieza de paño. Vendió la mitad de la pieza y media vara más; luego vendió la mitad de lo que le quedó y media vara más; y luego vendió la mitad de lo que le quedó y media vara más. Después de la tercera venta tenía 7 varas. ¿Cuántas varas tenía la pieza de paño?

25. Interpretación de las expresiones $\frac{a}{0}$ y $\frac{0}{0}$. Teorema: Si quedando fijo el numerador de un quebrado cuyos dos términos son positivos, el denominador va disminuyendo y puede acercarse á cero cuanto se quiera, el valor del quebrado irá aumentando, y llegará á ser mayor que cualquier cantidad por grande que ésta sea. Verdadero valor de una expresión algebraica.

Averiguar el valor de la expresión $\dfrac{x^3-4ax^2+5ax-2a^3}{x^2-a^2}$, cuando x sea igual á a.

26. Igualdad, identidad y ecuación. Raíz ó solución de una ecuación. Grado de una ecuación. Ecuaciones equivalentes. Teorema: Si á los dos miembros de una ecuación se agrega ó quita una misma cantidad, la ecuación que resulta es equivalente á la primera. Teorema: Si los dos miembros de una ecuación se multiplican ó dividen por una misma cantidad, positiva ó negativa, independiente de la incognita, la ecuación que resulta es equivalente á la primera. Teorema: Una ecuación se altera multiplicando sus dos miembros por cero. Teorema: Multiplicando los dos miembros de una ecuación por una cantidad desconocida, la nueva ecuación puede tener mayor número de soluciones que la propuesta. Teorema: Dividiendo los dos miembros de una ecuación por una cantidad desconocida, la nueva ecuación puede tener menor número de soluciones que la propuesta. Teorema: Elevando los dos miembros de una ecuación á una misma potencia, la nueva ecuación puede tener mayor número de soluciones que la propuesta. Teorema: Extrayendo una misma raíz de los dos miembros de una ecuación, la nueva ecuación puede tener menor número de soluciones que la propuesta.

27. Operaciones para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita.

28. Resolver las ecuaciones siguientes:

1] $\dfrac{6x+18}{13}-\dfrac{11-3x}{36}=5x-43\dfrac{1}{6}-\dfrac{13-x}{12}-\dfrac{21-2x}{18}$

2] $\dfrac{3ax-2b}{3b}-\dfrac{ax-a}{2b}=\dfrac{ax}{b}-\dfrac{2}{3}$

3] $\sqrt{4x+16}=12$

4] $x+a+\sqrt{2ax+x^2}=b$

Problema: Un padre que tiene tres hijos manda en su testamento que se dividan sus bienes de la manera siguiente: el primero debe recibir una suma a, más la n parte de lo que resta; el segundo una suma $2a$, más la n parte de lo que queda después de sacada la primera parte y $2a$; el tercero, en fin, debe percibir una suma $3a$, más la n parte de lo que queda después de sacadas las dos primeras partes y $3a$. Hecho esto, están divididos los bienes; se pregunta su valor.

29. Sistemas de ecuaciones. Solución de un sistema de ecuaciones. Sistemas equivalentes. Teorema: Una ecuación que forme parte de un sistema puede ser reemplazada por la ecuación que se obtenga de sumar ó restar miembro á miembro las ecuaciones propuestas. Forma general de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Teorema. Si en un sistema de n ecuaciones con n incógnitas se despeja una cualquiera de éstas, y se sustituye su valor en las demás, se obtiene un nuevo sistema equivalente al primero, en el cual $n-1$ ecuaciones no contienen aquella incógnita.

30. Método de sustitución para resolver un sistema de ecuaciones.

31. Resolver por el método de sustitución los siguientes sistemas:

1] $7x-4y+3z=35$

$4x-5y+2z=6$

$2x+3y-z=20$

2] $\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{1}{5}$; $\dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{1}{6}$; $\dfrac{xz}{x+z}=\dfrac{1}{7}$.

Problema: Encontrar una fracción tal, que, aumentados sus dos términos en una unidad, se convierta en $\frac{4}{5}$, y disminuídos en una unidad, se convierta en $\frac{3}{4}$.

32. Método de eliminación (por suma ó resta) para resolver un sistema de ecuaciones.

33. Resolver los siguientes sistemas por el método de eliminación:

1] $\dfrac{2x}{5}+\dfrac{3y}{4}=13\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{5x}{6}+\dfrac{3y}{5}=13\dfrac{1}{2}$.

2] $x+y+z=35$

$x-2y+3z=15$

$y-x+z=-5$.

Problema: Tres amigos jugaron otras tantas noches sucesivas. En la primera noche perdió uno de ellos, y los otros dos ganaron, cada uno una cantidad igual á la que tenían antes de principiar el juego: en la segunda noche perdió uno de éstos y ganaron los otros dos, cada uno una cantidad igual á la que tenían al comenzar el juego esta noche; en la tercera, el que hasta entonces había ganado, perdió con cada uno de los otros una cantidad igual á la que estos tenían antes de principiar el juego esta última noche. Habiendo quedado todos con 200 pesos, ¿cuánto tenía cada uno antes de principiar á jugar?

34. Método de igualación para resolver un sistema de ecuaciones.

35. Resolver por el método de igualación los siguientes sistemas:

1] $2t-u+2y-z=3$

$u+y-6z=5$

$2t+2x+2y+z=7$

$2u-y=4$

$4t-u+8z=1$.

2] $x+y+z=a$

$y+z+u=b$

$z+u+x=c$

$u+x+y=d$.

Problema: Un tren T, cuya velocidad es de 6 millas por hora, parte antes de otro tren T′, cuya velocidad es de 20 millas por hora; y el retardo está calculado de modo que lleguen á un tiempo á su destino. El tren T′, reduce su velocidad á la mitad cuando ha recorrrido los $\frac{2}{3}$ del trayecto total. Los dos trenes se encuentran 18 millas antes de llegar al fin de su carrera. Se pregunta ¿cuál es la longitud del trayecto total?

36. Método de Bezout para resolver un sistema de ecuaciones.

37. Resolver por el método de Bezout los sistemas siguientes:

1] $\frac{80+3x}{15}=18\frac{1}{3}-\frac{4x+3y-8}{7}$

$10y+\frac{6x-35}{5}=55+10x$.

2] $a'x+b'y+c'z=d'$

$a''x+b''y+c''z=d''$

$a'''x+b'''y+c'''z=d'''$.

Problema: De cada uno de los vértices de un triángulo se desea trazar circunferencias tangentes exteriormente dos á dos; calcular los rádios de estas circunferencias, conociendo las longitudes a, b, c, de los tres lados del triángulo.

38. Método abreviado para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Aplicación de los determinantes á la resolución de un sistema de ecuaciones.

39. Resolución, con auxilio de los determinantes, del sistema siguiente:

$5x+3y-2z+t=9$

$3x+4y+3z-2t=12$

$6x+2y-4z+3t=10$

$2x+5y-z+4t=25$.

Problema: Se obligó uno á trasportar una partida de porcelana en la cual había piezas de tres distintos tamaños, con la condición de que por cada pieza que se quebrase pagaría tantos pesos como hubiera cobrado por el porte, si hubiese llegado entera. Se le entregaron primeramente dos piezas pequeñas, 4 medianas y 9 grandes; quebró todas las medianas, y percibió 56 pesos. Después se le entregaron 7 piezas pequeñas, 3 medianas y 5 grandes: quebró todas las grandes y percibió sólo 6 pesos. Por último, se le entregaron 9 piezas pequeñas, 10 medianas y 11 grandes: quebró todas las grandes, y percibió 8 pesos. ¿Cuánto ganaba por el porte de cada pieza?

40. Resolución de un sistema de ecuaciones de primer grado con más incognitas que ecuaciones. Sistemas indeterminados.

41. Resolución de un sistema de ecuaciones de primer grado con menos incógnitas que ecuaciones.

42. Problemas particulares de primer grado con una incógnita. Ejemplo: Dos caños llenan un estanque del modo siguiente: después de haber llenado el primero, A, la cuarta parte, se abre el segundo, B, y los dos lo llenan en el tiempo que empleó el primero en llenar la cuarta parte, más hora y cuarto. Si los dos caños se hubieran abierto á un tiempo, habrían llenado el estanque en un cuarto de hora menos. Se desea saber cuánto tiempo emplearía el primer caño en llenar el estanque.

43. Problemas particulares de primer grado con dos ó más incógnitas. Ejemplo: Un número consta de cuatro cifras, cuya suma es 16: la cifra de las centenas es dupla de la de los millares: la suma de las cifras de los millares, centenas y unidades es igual á la cifra de las decenas; y por último, agregando 4536 al número dado, resulta el mismo, escrito en orden inverso. ¿Cuál será este número?

44. Problemas generales. Ejemplo: Buscar un número, cuyas partes de una cierta denominación, multiplicadas entre sí, den el mismo producto que las partes del mismo número de una denominación mayor en una unidad que la primera.

45. Casos de imposibilidad en los problemas de primer grado. Discusión de la ecuación $ax+b=0$. Interpretación de los valores $n, -n$, 0, $\frac{0}{0}$ é ∞, como resultados del valor de la incógnita.

46. Discusión de los problemas siguientes:

1º—Dos móviles corren, uniformemente y en el mismo sentido, de x hacia y, sobre una misma recta $x\,y$, con las velocidades v y v': estando actualmente uno en A y otro en A' á las distancias a y a' de un punto O, se desea averiguar la distancia del punto O al punto de encuentro de los dos móviles, y la época en que se verifica.

$\longrightarrow$ $\longrightarrow$

x —— R'' —— O —— R' —— A —— A' —— R —— y

2º—En una población invadida por la peste han muerto la décima parte de sus habitantes, la vigésima se hallan enfermos, y la trigésima convaleciendo; si hubiesen sido invadidos 200 individuos más, hubieran sido atacados la mitad de sus habitantes. ¿Cuál era el número de éstos antes de la invasión?

47. Potencias de los monomios. Teoremas: 1º—La potencia de un producto es igual al producto de las potencias del mismo grado de sus factores; 2º—La potencia de un quebrado es igual á la potencia del numerador partido por la potencia del denominador; 3º—Para elevar una cantidad que tiene exponente entero, positivo ó negativo, á una potencia cuyo exponente sea también entero, positivo ó negativo, se multiplican los dos exponentes.

48. Efectuar las potencias siguientes:

1] $[2\,x^2\,y^3\,z]^4$.

2] $[-x^4\,y^{-3}\,z^{-n}]^n$.

3] $[-a^4\,b^2\,c^{-n}\,d^{-2n}]^{3n}$.

4] $[a^3\,b^{-4}\,c^3\,d^{-n-2}]^{n-2}$.

5] $\left(\dfrac{2\,x^2\,y}{3\,a^2\,b}\right)^2$.

6] $\left(\dfrac{a^2\,b^2\,c^{n-1}}{x^{n-2}\,y^{n-3}}\right)^n$.

7] $[a^{-m}]^n$.

8] $\left(\dfrac{a^{-m}}{a^{-n}}\right)^{-n}$.

Problema: Dos amigos hicieron en una fonda un gasto de 60 reales, que ninguno de ellos tenía bastante dinero para pagar. Satisfizo al fin, el primero la deuda, habiendo tomado al efecto los $\frac{2}{3}$ de la cantidad que tenía el segundo: también hubiera podido éste satisfacerla tomando los $\frac{3}{4}$ de lo que tenía aquél. ¿Cuánto dinero tenía cada uno?

49. Raíces de los monomios. Teoremas: 1º La raíz real de un número negativo es igual á menos la raíz aritmética del mismo número hecho positivo. $[\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}=-2]$; 2º—La raíz de un producto de factores positivos es igual al producto de las raíces del mismo grado de dichos factores; 3º—La raíz de un quebrado, cuyos dos términos son positivos, es igual á la raíz del numerador, dividida por la raíz del denominador; 4º—Para extraer una raíz de una potencia, cuyo exponente es divisible por el índice de la raíz, se parte el exponente por el índice.

50. Ejercicios sobre las raíces de los monomios:

1] $\sqrt{25\,x^8\,y^6}$.

2] $\sqrt[m]{a^m\,x^m\,y^m}$.

3] $\sqrt{18\,a^3\,b\,c^4}$.

4] $\sqrt[4]{x^4\,y^8\,z^3\,u^2}$.

5] $\sqrt[3]{\dfrac{8\,x^3}{27\,y^6}}$

6] $\sqrt{12\,a^5\,b\,c^2}$.

Problema: Cuatro aldeas están situadas en el orden A, B, C, D. De A á D hay 34 leguas. La distancia de A á B es á la de C á D como 2 es á 3, y $\frac{1}{4}$ de la distancia de A á B añadido á la mitad de la de C á D, es igual á tres veces la distancia de B á C. ¿Cuáles son las distancias respectivas?

51. Cuadrado y raíz cuadrada de los polinomios.

52. Extraer la raíz cuadrada de los siguientes polinomios:

1] $40\,x^2-12\,x^3+9\,x^4-24\,x+36$.

2] $4\,x^6+5\,x^4+12\,x^5-5\,x^2-10\,x^3+2\,x+1$.

3] $49\,x^4-28\,x^3-17\,x^2+6\,x+\frac{9}{4}$.

4] $\dfrac{a^2\,x^2+2\,a\,b\,x^3+b^4\,x^4}{a^{2m}+2\,a^m\,x^m+x^{2n}}$

Resolver las ecuaciones siguientes:

1] $\dfrac{x-a\,x}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}}{x}$

2] $x+a+\sqrt{2ax+x^2}=b$.

3] $\sqrt{x-a}=\sqrt{x}-\frac{1}{2}\sqrt{a}$.

53. Cubo y raíz cúbica de los polinomios.

54. Extraer la raíz cúbica de los polinomios siguientes:

1] $m^3-3m^2+5-\frac{2}{m^2}-\frac{1}{m^3}$

2] $x^3-3x^2y-y^3+8z^3+6x^2z-12xyz+6y^2z+12xz^2-12yz^2+3xy$.

3] $x^6-3x^5+5x^3-3x-1$.

Hallar la raíz del cuarto grado del polinomio siguiente:

$$1-8a+24a^2-32a^3+16a^4.$$

Hallar la raíz del sexto grado del polinomio:

$$x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1.$$

55. Disposiciones numéricas. Ordenaciones ó arreglos. Hallar el número de arreglos binarios, ternarios, etc. de m letras agrupadas de n en n.

56. Permutaciones. Hallar el número de permutaciones que pueden formarse con n objetos.

57. Combinaciones [ó productos diferentes]. Hallar el número de combinaciones binarias, ternarias etc. de m letras. El número de combinaciones de m letras tomadas n á n, es igual al número de combinaciones de m letras tomadas $m-n$ á $m-n$.

58. Binomio de Newton. Demostración de la fórmula del binomio de Newton. Investigación de la fórmula del término general. Hallar el límite de la expresión $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$.

59. Potencias de los polinomios. Teoremas: 1º—El cuadrado de un polinomio es igual á la suma de los cuadrados de sus términos, más el duplo de la suma de sus productos binarios; 2º—El cuadrado de un trinomio tiene seis términos; y si es un trinomio de segundo grado con respecto á una letra, tiene comunmente cinco términos, pero también puede tener cuatro.

60. Extracción de la raíz del grado m de un polinomio.

61. Cálculo de los valores aritméticos de las cantidades radicales.—Definiciones. Trasformación de los radicales. Teorema: Una cantidad radical no varía multiplicando su índice por un número entero, y elevando la cantidad que está de bajo del signo radical á la potencia del grado indicado por dicho número entero. Reducción de cantidades radicales á un índice común. Adición y sustracción de radicales. Teorema: Una cantidad radical en que la cantidad que está debajo del signo radical es un producto, no varía

dividiendo el índice y los exponentes de los factores del producto por un divisor común. Simplificación de los radicales. Multiplicación de radicales de un mismo índice. Multiplicación de radicales de diferentes índices. División de radicales de un mismo índice. División de radicales con diferentes índices. Elevación á potencias de las cantidades radicales. Extracción de raíces de las cantidades radicales. Trasformación de algunas expresiones irracionales. Trasformar un quebrado cuyo denominador es irracional de segundo grado, en otro quebrado cuyo denominador sea racional. Trasformar la expresión $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ en otra equivalente de la forma $\sqrt{A}\pm\sqrt{B}$.

62. Generalización de las reglas conocidas para la multiplicación, la división, la elevación á potencias y la extracción de raíces. Demostrar que con las cantidades que tienen exponentes negativos ó fraccionarios se opera de la misma manera que con las que lo tienen entero.

63. Cálculo de las cantidades imaginarias de segundo grado. Teorema: Una expresión imaginaria no es nula ni infinita. Teorema: Todo monomio imaginario es igual á la raíz cuadrada aritmética del módulo de la cantidad que está debajo del radical multiplicado por $\sqrt{-1}$. Teorema: Todo binomio $a+b\sqrt{-1}$, cuyos términos son uno real y otro imaginario, es una cantidad imaginaria. Suma, resta, producto y cociente de dos cantidades imaginarias. Suma y producto de dos imaginarias conjugadas. Módulo de una expresión imaginaria. Módulo de un producto. Módulo de un cociente. Potencias de $\sqrt{-1}$.

64. Teorema: Una potencia cualquiera del binomio $a+b\sqrt{-1}$ es, en general, un binomio imaginario; pero también puede ser un monomio imaginario ó una cantidad real. Teorema: Una raíz cualquiera de un binomio imaginario $a+b\sqrt{-1}$ es siempre un binomio imaginario. Trasformar una cantidad imaginaria de cuarto grado en una cantidad imaginaria del segundo grado. Teorema: Las raíces de dos cantidades imaginarias conjugadas son también imaginarias conjugadas. Teorema: Si tenemos la igualdad $A+B\sqrt{-1}=0$, será necesariamente $A=0$, $B=0$. Teorema: Si tenemos la igualdad $a+b\sqrt{-1}=a'+b'\sqrt{-1}$, será $a=a'$, $b=b'$. Teorema: Si un producto de varios factores imaginarios es cero, uno por lo menos de dichos factores será cero.—Teorema: Toda cantidad real ó imaginaria tiene dos raíces cuadradas que sólo se diferencian en el signo, y no tiene más raíces cuadradas que estas dos.

65. Ecuaciones incompletas de segundo grado. Resolución de las ecuaciones incompletas de segundo grado. Ejercicios y problemas.

66. Ecuación completa de segundo grado. En toda ecuación de segundo grado, reducida á la forma $x^2+mx+n=0$, la incógnita es igual á la mitad del coeficiente del segundo término mudado el signo, $\pm$ la raíz cuadrada del cuadrado de dicha mitad sumado con el tercer término con el signo cambiado. En toda ecuación de segundo grado reducida á la forma $a\,x^2+b\,x+c=0$, la incógnita es igual al coeficiente del segundo término mudado el signo, más y menos la raíz cuadrada del cuadrado del mismo coeficiente disminuído algebraicamente en el cuádruplo del producto de los coeficientes extremos, dividido todo por el duplo del coeficiente del primer término.

67. Raíces de una ecuación de segundo grado. Teorema: La suma de las raíces de la ecuación $x^2+m\,x+n=0$, es igual al coeficiente del segundo término mudado el signo, y su producto es igual al tercer término. Teorema: Si la suma de dos cantidades es $-m$, y su producto es n, estas dos cantidades son las raíces de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2+m\,x+n=0$.

Descomposición del primer miembro de una ecuación de segundo grado en factores binomios de primer grado.

68. Ecuaciones bicuadradas. Resolución de la ecuación $x^4+p\,x^2+q=0$. Resolución de la ecuación $a\,x^4+b\,x^2+c=0$.

69. Demostrar que $\sqrt{\sqrt{-1}}=\frac{1+\sqrt{-1}}{2}$. Teorema: Toda cantidad real tiene tres raíces cúbicas. Raíces cúbicas de la unidad. Teorema: Las raíces de una cantidad se obtienen multiplicando una de ellas por las raíces de la unidad.

70. Resolución de un sistema de ecuaciones que no pasen del segundo grado. Teorema: Eliminando una incógnita entre dos ecuaciones que no pasen del segundo grado, cada una con dos incógnitas, la ecuación que resulta no puede pasar del cuarto.

71. Determinar el signo de las raíces de una ecuación de segundo grado, sin resolverla. Discusión de las ecuaciones incompletas de segundo grado.

72. Discusión de la ecuación de segundo grado $a\,x^2+b\,x+c=0$, siendo reales los coeficientes a, b, c. Cuando las raíces de la ecuación $a\,x^2+b\,x+c=0$, son imaginarias, tienen la forma $d+h\sqrt{-1}$ y $d-h\sqrt{-1}$.

73. Problemas particulares de segundo grado. Ejemplo: Se han descontado dos letras, una de 4140 pesos con 7 meses de anticipación, y otra de 6120 pesos con 4 meses de anticipación: se ha pagado por ambas 10000 pesos. ¿Á qué tanto por ciento ha sido el descuento mensual?

74. Problemas generales de segundo grado. Ejemplo: Dividir un número en dos partes tales, que un múltiplo determinado de la primera, multiplicado por otro múltiplo determinado de la segunda, dé un producto determinado.

75. Cuestiones de máximos y mínimos que pueden resolverse por medio de una ecuación de segundo grado. Ejemplo: Dividir un número $2\,a$ en dos partes tales, que la suma de las raíces cuadradas de estas dos partes, sea un máximo.

76. Hallar el mínimo de la expresión $\frac{m^2\,x^2+n^2}{[m^2-n^2]x}$. Método que debe seguirse en la resolución de las cuestiones de máximo y mínimo.

77. Resolución de las ecuaciones de dos términos.

78. Desigualdades. Propiedades generales de las desigualdades. Teoremas: 1º—Una desigualdad se conserva, cuando á sus dos miembros se les añade ó quita una misma cantidad; 2º—Una desigualdad se conserva si sus dos miembros se multiplican ó dividen por una misma cantidad positiva; pero cambia de carácter si sus dos miembros se multiplican ó dividen por una misma cantidad negativa. Manera de trasportar los términos en una desigualdad. Manera de hacer desaparecer los denominadores en una desigualdad.

79. Elevación á potencias y extracción de raíces de los dos miembros de una desigualdad. Teoremas. 1º—Cuando los dos miembros de una desigualdad son positivos, cualquiera que sea el exponente de la potencia á que se eleven, la desigualdad subsiste y conserva su sentido; 2º—Cuando los dos miembros de una desigualdad son negativos, y es impar el exponente de la potencia á que se eleven, la desigualdad subsiste y conserva su sentido; pero lo cambia si es par el exponente de la potencia; 3º—Cuando los dos miembros de una desigualdad son de signos contrarios, y es impar el exponente de la potencia á que se eleven, la desigualdad subsiste y conserva su sentido; mas no

se puede predecir el resultado, si el exponente de la potencia es par, porque la desigualdad puede conservar su carácter, ó cambiarlo, ó trasformarse en igualdad; 4º—Si los dos miembros de una desigualdad son positivos, el índice de la raíz que se les extraiga, nada influye en el sentido de la desigualdad; 5º—Si los dos miembros de una desigualdad son negativos, y es impar el índice de la raíz, la desigualdad subsiste con su sentido; pero si es par el índice, nada puede decirse, por ser los resultados imaginarios; 6º—Si los dos miembros de una desigualdad son de signos contrarios, y se les extrae raíz de índice impar, la desigualdad subsiste con su sentido; pero si la raíz es de índice par, nada puede decirse, porque uno de los miembros es imaginario.

80. Suma, resta, multiplicación y división de dos desigualdades simultáneas. Desigualdades de primer grado con una sola incógnita. Teorema: Si varias fracciones de términos positivos son desiguales, la fracción que tiene por numerador la suma de los numeradores, y por denominador la suma de los denominadores, está comprendida entre la mayor y la menor de las propuestas. Problema: Un punto C está colocado con respecto á otros dos A y B, cuya distancia es $2\,c$, de tal manera que C A+C B es igual á $2\,a$: siendo $a>c$, averiguar entre qué límites pueden variar A C y B C.

81.—Algunas propiedades de las potencias y raíces de los números.—Teoremas: 1º—Las potencias enteras de un número mayor que 1 crecen, creciendo su exponente, y pueden valer más que cualquiera cantidad llegando á ser suficientemente grande el exponente: 2º—La raíz aritmética de una cantidad mayor que 1 es: mayor que 1; menor que la cantidad; disminuye creciendo el índice; tiene por límite 1, creciendo el índice indefinidamente; 3º—Si en la expresión a^x en que $a>1$, crece x de una manera continua, ó por grados insensibles desde cero á ∞, a^x crecerá también de una manera continua desde 1 á ∞; 4º—Si en la expresión a^x en que $a>1$, crece x negativamente y de una manera continua desde 0 á $-\infty$, a^x disminuirá de una manera continua desde 1 á 0; 5º—Si en la expresión a^x, en que a es positivo y menor que 1, crece x continuamente desde cero á ∞, a^x disminuirá de una manera continua desde 1 á 0; 6º—Si en la expresión a^x, en que a es positivo y menor que 1, crece x negativamente y de una manera continua desde cero á $-\infty$, a^x crecerá continuamente desde 1 á ∞.

82. Propiedades generales de los logaritmos. El logaritmo de un número es el exponente á que debe elevarse una cantidad positiva y diferente de 1, llamada base para que la potencia sea igual al número. En sistemas diferentes un mismo número tiene logaritmos diferentes, y un mismo logaritmo corresponde á números diferentes. En todo sistema de logaritmos el logaritmo de la unidad es cero y el logaritmo de la base es 1. Signo de logaritmos de los números mayores ó menores que 1, cuando la base del sistema es mayor ó menor que 1.

83. Demostración general de los cuatro teoremas de logaritmos.

84. Construcción de tablas logarítmicas. Sistemas Neperiano y vulgar. Método de Lagrange para hallar el logaritmo de un número. Determinar el exponente que se debe dar á 10 para obtener 2.

85. Ecuaciones exponenciales. Problema: Construída una tabla de logaritmos en un sistema cuya base es a, construír por medio de ella otras tablas en otro sistema cuya base sea A.

86. Estudio de las progresiones decrecientes continuadas al infinito. La suma de los términos de una progresión geométrica decreciente continua-

da al infinito es igual al primer término dividido por la unidad menos la razón. Hacer aplicación del teorema anterior á la determinación de la generatriz de una fracción decimal periódica.

87. Pilas de balas. Construcción del triángulo de Tartaglia y explicación de sus principales propiedades. Hallar la suma $1^2+2^2+3^2+\dots\dots+n^2$ de los cuadrados de los números naturales, dado el número n de estos cuadrados. El número de balas del lado de la base de una pila cuadrangular, es igual al número total de capas de dicha pila. Hallar el número de balas de una pila cuadrangular, conociendo el número de balas del lado de la base.—Hallar el número de balas de una pila rectangular, dados los números de balas de los lados de la base. Hallar la suma de las balas de una pila triangular, dado al número de capas.

88. Leyes formuladas por Laplace para resolver un sistema de ecuaciones de primer grado:

1ª—El denominador es común á todos los valores de las incognitas;

2ª—Está formado de las ordenaciones que pueden hacerse con los coeficientes de las incognitas;

3ª—Sus signos son alternativamente positivos y negativos, principiando por positivo;

4ª—La primera letra de cada término carece de acento; la segunda tiene uno; la tercera, dos; la cuarta, tres, y así sucesivamente;

5ª—Si en el denominador se agrega ó se suprime un número igual de acentos á las letras semejantemente acentuadas, de modo que queden igualmente acentuadas, aquél se anula;

6ª—El denominador se anula si en él se cambia una letra por otra;

7ª—Los términos positivos provienen de inversiones alfabéticas en número par; las negativas de inversiones alfabéticas, en número impar;

8ª—El numerador se forma del denominador, poniendo en vez de los coeficientes de las incógnitas, los términos independientes respectivos.

Comprobación de las leyes expuestas. Aplicaciones.

89. Nociones sobre los determinantes. Definición. Término principal. Notaciones.

90. Propiedades de los determinantes:

1ª—Un determinante no se altera cuando se toman las columnas por renglones y los renglones por columnas;

2ª—Un determinante cambia de signo, cuando se permutan dos columnas;

3ª—Si se multiplican ó dividen todos los elementos de una columna, ó de un renglón por un factor cualquiera, el detarminante queda multiplicado ó dividido por dicho factor;

4ª—Si un determinante tiene dos columnas ó dos renglones iguales, el determinante es igual á cero;

5ª—Si todos los elementos de una columna ó de un renglón de un determinante son ceros, el valor del determinante es igualmente nulo.

91. Determinantes menores. Definición. Notación. Desarrollo de los determinantes. Método para desarrollar los determinantes.

92. Regla de Sarrus para desarrollar los determinantes del tercer grado. Simplificación del método de Sarrus. Ejemplos numéricos y literales.—Desarrollo de un determinante de un grado superior al tercero.

93. Propiedades de los determinantes que tienen uno ó más elementos iguales á cero. Teorema: Cuando se tiene un determinante en que todos los elementos que quedan á un lado de la diagonal principal, son iguales á cero,

el valor del determinante es igual á su término principal, ó sea al producto de los elementos de la diagonal. Teorema: Un determinante no cambia de valor, añadiendo ó quitando á los elementos de una columna ó de un renglón, los correspondientes de otra ú otras columnas ó renglones multiplicados por factores constantes. Determinante simétrico.

94. Multiplicación de determinantes. Teorema: El producto de dos determinantes de un orden cualquiera puede escribirse bajo la forma de determinante del mismo orden, cuyos elementos sean las sumas de los productos de los elementos de cada renglón de uno de los factores por los elementos correspondientes de todos los renglones del otro factor. Cuadrado de determinantes. Determinantes múltiplos.

95. Aplicaciones de los determinantes. Representar el área de un triángulo en forma de determinante. Compatibilidad de las ecuaciones. Resultantes.

96. Fracciones continuas. Ley de formación de las reductas, y demostración de que esa ley es general. Propiedades principales de las fracciones continuas:

1ª—La diferencia de dos reductas consecutivas cualesquiera es siempre igual, en valor absoluto, á la unidad dividida por el producto de los denominadores.

2ª—La fracción continua está comprendida entre dos reductas consecutivas cualesquiera;

3ª—Las reductas de orden par forman serie decreciente; las de orden impar, serie creciente;

4ª—Una fracción continua periódica es raíz de una ecuación de segundo grado, cuyos coeficientes son conmensurables.

97. Problemas sobre las fracciones continuas:

1º Convertir en fracción continua el quebrado $\frac{260}{73}$;

2º—Convertir en fracción continua el número $\sqrt{2}$;

3º—Resolver la ecuación exponencial $10^x=200$.

98. Análisis indeterminado de primer grado. Objeto de esta teoría. Forma general de una ecuación de primer grado con dos indeterminadas. Condición de los coeficientes, y manera de preparar la ecuación. Investigación de un sistema de soluciones enteras de la ecuación $a\,x+b\,y=c$. Fórmulas que dan todas las soluciones enteras de la ecuación $a\,x+b\,y=c$.

99. Resolución de la ecuación $a\,x+b\,y=c$ en números enteros y positivos. Estudio de la ecuación $a\,x-b\,y=c$. Resolución de dos ecuaciones de primer grado con tres indeterminadas.

100. Problemas: 1º—Con cuántas monedas de á dos reales y de á cuatro reales puede formarse la longitud del metro, colocándolas unas á continuación de otras y sabiendo que las primeras tienen 23 milímetros de diámetro y las segundas 27? 2º—Interrogado un pastor sobre el número de sus ovejas, contestó: "Haciendo grupos de á 15, sobran 7; de á 14, sobran 11. de á 13, sobran 2; de 11, sobra 1; y el número de mis ovejas no llega á 100." ¿Cuántas ovejas tenía? 3º—En una gratificación que se les da á los obreros de una fábrica se gastan 312 reales, dándole 10 reales á cada hombre, 8 á cada mujer y 4 á cada niño. Si á cada persona se le dieran 2 reales menos, se gastarían 236. Búsquese el número de hombres, el de mujeres y el de niños.

TEXTO: *Álgebra* de don J. Cortázar [29ª edición].

OBRAS DE CONSULTA: E. Combette, *Cours d' Algébre élémentaire;* G. Dostor, *Déterminants.*

SEGUNDA ENSEÑANZA.

SEGUNDO AÑO.

Ciencias y Letras.

Programa de Geografía descriptiva.

I

Descripción física.

EUROPA.

1. *Posición y contornos.*—Posición astronómica.—Límites físicos.—Dimensiones y superficie.—Forma general: costas.—Penínsulas: istmos.—Cabos.—Grandes regiones físicas.

2. *Montañas y mesetas.*—Orografía general: altura media de las tierras. Sistemas de montañas.—Sistema hispánico: situación y división: grupo septentrional ó de los Pirineos: grupo central ó montes Ibéricos; altiplanicies de Castilla: grupo meridional ó Sierra Nevada.—Sistema galo: situación y división: grupo meridional ó de las Cevenas: grupo septentrional ó de los Vosges.—Sistema alpino: situación y división: grupo de los Alpes italianos: id. de los suizos: id. de los austriacos.—Sistema itálico: situación y división: grupo de la Italia peninsular: id. de la Sicilia: id. sardo-corso.

3. *Continuación de la orografía.*—Sistema helénico: situación y división: grupo del Noroeste ó Alpes Dináricos: grupo del Sur ó cadena del Pindo: grupo del Este ó montes Balkanes.—Sistema germánico ó hercinio-carpaciano: situación y división: grupo occidental ó herciniano: grupo oriental ó carpeciano.—Sistema del Cáucaso: situación y división: cimas y vertientes.—Sistema urálico: situación, divisiones y vertientes.—Sistema eslavo: situación y división. Sistema escandinavo: situación y división: altitud y puntos culminantes: vertientes: consecuencias de la constitución orográfica de Escandinavia: fenómeno de solevantamiento.—Sistema británico: situación y división: Gran Bretaña: Irlanda.

4. *Llanuras—Islas—Volcanes.*—Distribución general de las llanuras. Estepas; landas y pantanos.—Distribución general de las islas.—Islas del océano Glacial.—Id. del mar Báltico.—Id. del mar del Norte.—Id. de la Mancha. Id. de los mares Adriático y Jónico.—Id del Archipiélago.—Volcanes activos. Tierras volcánicas.

5. *Mares—Glaciares—Lagos.*—Océanos y mares.—Partes del océano Glacial.—Id. del Atlántico.—Id. del mar Mediterráneo.—Mar Caspio.—Profundidad de los mares.—Corrientes marinas.—Glaciares.—Fuentes minerales. Lagos principales.—Lagos de Suecia.—Id. de Rusia.- Id. de Alemania septentrional.—Id. de Suiza.—Id. de Italia.—Id. de Hungría.

6 *Ríos.*—Vertientes generales: gran línea de separación.—División hidrográfica.—Vertiente europea del océano Glacial: límites y división: caracteres generales: ríos.—Región del mar Báltico: límites y división: ríos.—Cuenca del mar del Norte: límites y división: vertiente oriental: id. meridional: id. occidental ó británica.—Región del mar de Irlanda: límites y división: ríos. Región de la Mancha: límites y división: ríos.

7. *Ríos.*—Vertientes directas del océano Atlántico; división: vertiente noruega: id. irlandesa: id. francesa: id. hispánicas.—Cuenca occidental del Mediterráneo: límites y división: vertiente española: id. francesa: id. del mar Tirreno.—Región del Adriático y del mar Jónico: límites y división: vertientes italiana é ilírica: región del mar Jónico.—Región de los mares Archipiélago y de Mármara: examen general: ríos.—Región de los mares Negro y de Azof: hoya del Danubio: vertiente rusa.—Vertiente europea del mar Caspio: examen general: ríos.

8. *Clima.*—Clima general.—Zonas isotermas.—Extremos de temperatura.—Decrecimiento de la temperatura en altitud, ó límite inferior de las nieves perpetuas.—Vientos.—Lluvia: cantidad de lluvia por año: estaciones lluviosas: vientos pluviales.—Tempestades.—Salubridad.

9. *Producciones naturales.*—Reino mineral: examen general: piedras y tierras: combustibles: metales.—Reino vegetal: examen general: plantas alimenticias: plantas industriales: maderas: plantas diversas.—Reino animal: examen general: especies animales: sustancias animales.

10. *Etnología.*—Población absoluta y relativa.—División etnográfica. Familia céltica.—Id. latina.—Id. griega.—Id. teutónica. | Id. eslava.—Id. gitana ó zíngara.—Id. irania.—Id. caucásica.—Rama semítica.—Familia mongola.—Id. ogriana.—Id. turca.—Lenguas: división general.—Lenguas célticas. Id. latinas.—Id. griegas.—Id. teutonas.—Id. eslavas.—Id. zíngara.—Id. del Cáucaso.—Id. de la rama escita.

ASIA.

11. *Posición y contornos.*—Posición astronómica.—Límites físicos.—Dimensiones y superficie.—Costas.—Penínsulas.—Cabos.—Países.

12. *Montañas y mesetas.*—Orografía general: altura media de las tierras: sistemas de montañas.—Sistema de la gran meseta central: situación y división; grupo de la altiplanicie de Mongolia: id. de la del Thibet,—Sistema de la altiplanicie del Irán: límites y división: montañas.—Sistema de la Arabia: situación y divisiones.

13. *Llanuras—Desiertos—Islas—Volcanes.*—Distribución general de las llanuras.—Planicie del Turkestán.—Planicies de la Siberia occidental.—Planicie de la China oriental.—Planicie del Ganges.—Id. del Indo.—Id. del Chat-el-Arab.—Desiertos de Siria y de Arabia.—Id. del Irán.—Desierto de Cobi.—Distribución general de las islas.—Islas del océano Glacial Id. del Pacífico.—Id. del Indico.—Id. del Mediterráneo.—Volcanes activos.—Regiones volcánicas.

14. *Mares—Glaciares—Lagos.*—Océanos y mares.—Partes del océano Artico.—Id. del Grande Océano.—Id. del Indico.—Id. del mar Mediterráneo. Id. del Caspio.—Profundidad de los mares.—Corrientes marinas.—Glaciares notables,—Lagos principales.—Lagos de Siria.—Id. de Anatolia y de Armenia.—Id. del Irán.—Id. del Turkestán y de Siberia.—Id. de la altiplanicie central.—Id. de China.

15. *Ríos.*—División hidrográfica.—Vertiente del océano Glacial: límites y división: caracteres generales: ríos.—Vertiente del Pacífico: límite y división: vertiente asiática del mar de Behring: región del mar de Okhotsk y del mar del Japón: id. del mar Amarillo y del mar Azul: id. del mar de China. Vertiente del Indico: limites y división: región del golfo de Bengala: id. de los mares de Omán y Rojo.—Vertiente de los mares Mediterráneo y Negro: límites y división: ríos.—Regiones interiores: cuencas de los mares Caspio y de Aral: id. de la altiplanicie del Irán y de la central: id. del mar Muerto ó lago de Asfaltites.

16. *Clima.*—Clima general.—Zonas isotermas.—Extremos de temperatura.—Límite inferior de las nieves perpétuas.—Vientos.—Lluvias.—Tempestades, huracanes.—Enfermedades endémicas.

17. *Producciones naturales.*—Minerales: examen general: piedras y tierras: metales: combustibles.—Vegetales: examen general: carácter: principales especies: regiones botánicas: plantas alimenticias: id. medicinales: id. industriales: maderas.—Animales: examen general: principales especies: sustancias animales.

18. *Etnología.*—Pablación absoluta y relativa.—Familia aria.—Id. irania.—Id. caucasiana.—Pueblos europeos.—Rama semítica.—Fámilia mongola.—Id. ogriana.—Id. turca.—Id. china.—Id. indo-china.—Id. thibetana. Id. draviana.—Razas negra y malaya. —Lenguas de los pueblos de la raza blanca.—Id. de los de la amarilla.

AFRICA.

19. *Posición y contornos.*—Situación astronómica.—Límites físicos.—Dimensiones y superficie.—Costas.—Cabos.—Países.

20. *Montañas—Mesetas.*—Orografía general: altura media de las tierras: sistemas de montañas.—Sistema del Atlas: situación y división; grupo del Gran Atlas: cadenas y ramales: región de las altiplanicies.—Sistema del Sahara: situación y división: grupo de Trípoli: id. del Fezzán: altiplanicies, y montes aislados.—Sistema del Sudán: situación y división: montañas de Senegambia: id. del Sudán occidental: id. del central y oriental.—Sistema del Congo ó talud occidental: situación y división; grupos de montañas.— Sistema del Africa austral ó talud meridional: situación: montañas.—Talud oriental ó ecuatorial: situación: principales montañas.—Sistema de Abisinia: situación y división: montañas: terraplenes septentrionales.

21. *Llanuras—Islas—Volcanes.*—Desiertos.—Oasis.—Tierras bajas.—Examen general de las islas.—Islas del Mediterráneo.—Id. del Atlántico.—Id. del Indico.—Volcanes.—Volcanes activos.—Tierras volcánicas.

22. *Mares—Lagos.*—Mares, golfos y estrechos.—Profundidad de los mares.—Corrientes marinas.—Canal marítimo de Suez.—Lagos.—Principales lagos.—Lagos de la región del Atlas.—Id. del Sudán.—Id. de la región del Nilo.—Id. de la Alta Africa.

23. *Ríos.*—División hidrográfica.—Vertiente del Mediterráneo: límite y división: región del Nilo: vertiente de los golfos Sidra y de Cabes: vertiente del Atlas.—Vertiente del océano Atlántico: límites y división: vertiente de las costas del noroeste: vertiente de la costa de Guinea: vertiente de la costa del sur-oeste.—Vertiente del océano Indico: límites y división: ríos.

24. *Clima.*—Clima general.—Zonas isotermas.—Vientos.—Lluvia.—Salubridad.

25. *Producciones naturales.*—Minerales: examen general: piedras y combustibles: metales.—Vegetales: examen general: plantas alimenticias: id. medicinales: id. industriales: maderas.—Animales: examen general: principales especies animales: sustancias animales.

26. *Etnología.*—Población absoluta y población relativa.—División etnográfica.—Familia negra.—Id. cafre.—Id. hotentota.—Id. etiópica.—Población de la raza blanca.—Lenguas: división general.—Lenguas de los pueblos de la raza negra.—Lengua de los pueblos de la raza blanca.

OCEANÍA.

27. *Posición—División—Contornos.*—Situación.—Posición astronómica.—División general.—Dimensiones y superficie.—Costas de Australia.—Cabos.—División de Australia.

28. *Montañas—Tierras bajas—Islas.*—Orografía general.—Sistema orográfico de Australia: caracteres generales: grupo del E.: id. del S.: id. del O.—Sistema orográfico de las islas: caracteres generales: cadenas insulares y cimas principales.—Tierras bajas: Australia: islas madrepóricas; su configuración.—Islas de la Malesia.—Id. de la melanesia.—Id. de la Micronesia.—Id. la Polinesia.—Tierras Antárticas.

29. *Volcanes—Mares—Glaciares—Lagos—Ríos.*—Volcanes activos.—Líneas volcánicas.—Línea volcánica de Norte á Sur.—Id. de Oeste á Este.—Océanos y mares.—Golfos y estrechos.—Profundidad del océano Pacífico.—Corrientes marinas.—Nieves perpétuas y glaciares.—Lagos.—División hidrográfica de Australia: vertiente meridional: id. oriental: id. septentrional: id. occcidental.

30. *Clima—Producciones naturales.*—Clima general.—Zonas isotermas.—Extremos de temperatura.—Vientos.—Lluvia.—Salubridad.—Minerales: examen general: piedras: combustibles: metales.—Reino vegetal: generalidades: plantas alimenticias: id. industriales: maderas.—Reino animal: generalidades: principales especies: sustancias animales.

31. *Etnología.*—Población absoluta y relativa.—División etnográfica. Raza malaya.—Raza negra.—Razas amarilla y blanca.—Población mestiza.—Lenguas.—Lenguas malayo-polinésicas.—Id. australianas.—Id. papúas.

II.

Descripción Política.

EUROPA.

32. *Islas Británicas.*—Descripción política del Reino Unido de la Gran Bretaña é Irlanda (1).
33. Dinamarca.—Suecia y Noruega.—Rusia.
34. Bélgica.—Holanda.—Luxemburgo.—Suiza.
35. Francia.—Mónaco.
36. Alemania.
37. Austria—Hungría.—Liechtenstein.
38. Península Ibérica.—Andorra.
39. Italia.—San Marino.
40. Grecia.—Rumanía.—Servia.—Montenegro.
41. Turquía.—Bulgaria y Rumelia.

ASIA.

42. Descripción política de Arabia, Persia, y Turkestán con Bokhara y Khiva (2).
43. Id. id. de Afghanistán, Beluchistán, Siam, Nepaul y Boután.
44. Id. id. de la Malaca independiente, China, Corea y Japón.
45. Posesiones inglesas y francesas.
46. Posesiones rusas, turcas y portuguesas.

AFRICA.

47. Descripción política de Marruecos. Sahara, Liberia, Achantí independiente, y reinos de Dahomey, del Joruba y de Benín.
48. Id. del Estado independiente del Congo, de Orange, de Transvaal, de Etiopía y del país de los Afar.
49. País de los Somalis y de los Gallas.—Uganda y Unyoro.—Zanzíbar.—Estados del Sudán central.—Id. del Madhí.
50.—Posesiones y protectorados ingleses y franceses.
51. Id. id. turcos, portugueses, italianos, y alemanes.

OCEANÍA.

52. Descripción política, abreviada, de los estados indígenas independientes.

---

(1) Ls descripción política de este y los otros Estados de Europa, se arreglará conforme al siguiente programar

Divisiones políticas: capital.—Ciudades principales.—Población y superficie; algunas comparaciones á este respecto.—Lenguas.—Religiones.—Gobierno.—Hacienda pública, ejército y marina.—Instrucción pública.—Producciones agrícolas, minerales é industriales.—Vías de comunicación: ferrocarriles: puertos.—Comercio.—Posesiones.—Formación territorial.

(2) La descripción de los países de Asia, así como la de los de Africa y Oceanía, se ajustará en cuanto posible sea, pero con menor extensión, al programa dado para la descripción de los Estados de Europa.

53. Id. de las posesiones inglesas.
54. Id. de las holandesas y francesas.
55. Id. de las españolas, portuguesas y alemanas.

TEXTOS:

Para la parte física: Appleton, *Geografía física superior;* y explicaciones del profesor.

Para la parte política: Sánchez y Casado, *Elementos de Geografía comparada;* y explicaciones del profesor.

Atlas: Drioux et Leroy, *Atlas universel et classique de Géographie.*

ORRAS DE CONSULTA:

Malte-Brun, *Geografía universal.*
Grégoire, *Geografía universal.*
Brocklesby, *Elements of Physical Geography.*
Foncin, *Les cinq parties du monde.*
Reclus, *Géographie universelle.*
Du Fief, *Cours de Géographie.*
Espinal, *La naturaleza y el hombre.*
Gasquet, *Cours de Géographie générale.*
Bouillet, *Dictionaire de Géographie et d' Histoire.*
Bouillet, *Atlas d' Histoire et de Géographie.*
Steiler, *Hand-Atlas.*
Schrader, Prudent y Anthoine, *Atlas de Géographie moderne.*

SEGUNDA ENSEÑANZA.

SEGUNDO AÑO.

Ciencias y Letras.

Programa de Historia.

1. Edad Media: su determinación histórica, cronológica y geográfica. Los Bárbaros. Situación de los pueblos germanos. Sus costumbres, gobierno y religión. Los eslavos y pueblos á qué han dado origen. Pueblos de la raza escita.

2. Primeras invasiones de los Bárbaros. División del Imperio Romano á la muerte de Teodosio. Los visigodos; correrías de Alarico. La irrupción general del año 406. Fundaciones efímeras de algunos de estos pueblos.

3. Historia de Atila. Batalla de los Campos Cataláunicos. Atila en Italia. Los vándalos en Roma. Caída del Imperio de Occidente.

4. Los Ostrogodos; conquista de la Italia. Teodorico: su gobierno. El Imperio de Oriente. Justiniano. Conquista de Italia por los Emperadores de Oriente; el exarcado. Los lombardos en Italia. Fin de la dominación lombarda.

5. Conquista de la Gran Bretaña por los sajones. Invasión de los anglos. La Heptarquía; su fin. Los dinamarqueses. Reinado de Alfredo el Grande. Los dos Eduardos.

6. Los visigodos después de la muerte de Alarico. Ataulfo: invasión de España. Fundación de la monarquía visigoda: Teodoredo. Reinado de Eurico. Guerra de Alarico con los Francos. Recaredo y Wamba. Decadencia de los visigodos. Reinado de Don Rodrigo. Batalla "dicha del Guadalete."

7. La nación de los francos. Meroveo; Childerico. Clodoveo; victorias de Soissons y de Tolbiac. Sumisión de los burgundios. Fin del reino de los visigodos en las Galias. Los hijos de Clodoveo. Los hijos de Clotario; Neustria y Austrasia. Tratado de Andelot. Dagoberto I.

8. Organización social de los francos. La familia, las clases. Justicia; el wergeld; pruebas judiciales; el duelo. Asambleas. Poder de la Iglesia. Decadencia de los Merovingios, mayordomos de palacio. Nueva rivalidad entre Austrasia y Neustria. Los Heristales: Pepino de Heristal; Carlos Martel, Pepino el Breve. Carácter de la dignidad real.

9. La Arabia y los árabes. Vida de Mahoma. La hégira. Luchas de Mahoma contra los coreiscitas. Conversión de la Arabia. El Corán. La Religión de Mahoma.

10. Sucesores de Mahoma. Rápidas conquistas de los árabes. El Cisma. Los Omiadas; conquistas lejanas del Asia, África y España. Advenimiento de los Abasidas. Califato de Bagdad. Almanzor, Harún al-Raschid y Mamun. Decadencia del califato de Bagdad. Civilización de los árabes.

11. Poderío de los francos en el siglo VIII. Carlo-Magno. Guerras contra los lombardos, sajones y árabes. Extensión del Imperio de Carlo-Magno. Administración del Imperio. Impulso civilizador comunicado á sus reinos. Muerte de Carlo-Magno.

12. Rápida decadencia del Imperio de Carlo-Magno. Reinado de Luis el Benigno. Sus hijos. Batalla de Fontanet: tratado de Verdún.

13. Desmembramiento del Imperio de Carlo-Magno. Carlos el Calvo. Los normandos. Roberto el Fuerte. Carlos el Gordo. Asedio de París por los normandos. Deposición de Carlos el Gordo. Últimos Carlovingios. Los duques de Francia.

14. El feudalismo. Origen; feudos ó beneficios. El vasallo y el Señor. Herencia en los cargos públicos; grandes vasallos. Aniquilamiento del poder central. Clases. Derechos feudales. Castillos. Ciudades y villas. Miseria de la sociedad.

15. Bosquejo de los Estados modernos. Francia: los primeros Capetos. España: dominación de los Árabes; gobierno de los emires; califato de Córdoba; formación de los reinos de Asturias, León, Navarra, Castilla y Aragón. Portugal: Alfonso de Borgoña y la batalla de Ourique.

16. Italia á la disolución del Imperio de Carlo-Magno. Feudalismo italiano. Los normandos: los hermanos Hauteville. Reyes normandos de las Dos Sicilias. Intervienen los emperadores alemanes.

17. Inglaterra conquistada por los dinamarqueses. Canuto el Grande y sus hijos. Eduardo el Confesor: Guillermo de Normandía y Haroldo. Conquista de Inglaterra por los normandos.

18. El Bajo Imperio después de Justiniano. Heraclio: campañas contra los persas. Los Isaurianos ó Isáuricos. Focio. Los Comnenos.

19. Alemania. Estado de Alemania al fin de los Carlovingios. Advenimiento de la Casa de Sajonia. Enrique el Pajarero. Otón el Grande emperador. Otón II, Otón III y Enrique II. Fin de la Casa de Sajonia.

20. Alemania. Primeros reyes de la Casa de Franconia. El Imperio y el Papado. El monje Hildebrando; corrupción de la Iglesia. Reformas de Gregorio VII.

21. [illegible] el Sacerdocio y el Imperio. Enrique IV, su humillación en Canosa. Sitio de Roma por Enrique; muerte del Papa. Muerte de Enrique IV. Enrique V y el Concordato de Worms. Fin de la Casa de Franconia.

22. Las Cruzadas. Poder de la Iglesia. Jerusalén en 1094. Origen de los Turcos. [illegible] Pedro el Ermitaño. Sitios de Antioquía y Jerusalén. Reino de Jerusalén.

23. Cruzada de Luis VII. Cruzada de Felipe Augusto y de Ricardo. La Cuarta Cruzada y la fundación del Imperio Latino.

24. Cruzadas quinta y sexta. Cruzadas de San Luis. Resultados de las Cruzadas. La Caballería: órdenes militares y religiosas. Ensanche de los conocimientos y del comercio. Consecuencias políticas: origen y derechos de las Comunas, *pueblos ó municipios.*

25 Imperio alemán. Conrado III: Güelfos y Gibelinos. Federico I. "Barbarroja." Arnaldo de Brescia. Alejandro III y la Liga lombarda. Reinado de Enrique VI.

26. Poder del Papado. Inocencio III y Federico II. Consecuencias de la guerra del Sacerdocio y el Imperio. Los hijos de Federico II. Carlos de Anjou: Vísperas sicilianas.

27. Inglaterra. Dinastía normanda. Dinastía de los Plantagenets; creciente poder de los reyes ingleses. Enrique II y Tomás Becket. Ricardo Corazón de León. Decadencia de la monarquía inglesa: Juan sin Tierra. La Carta Magna. Progresos de las libertades inglesas; el Parlamento.

28. Francia. Primeros Capetos. Luis el Gordo. Luis VII. Felipe Augusto. Los Albigenses. Administración de Felipe Augusto. Luis VIII. Reinado de San Luis; su administración; progresos de la autoridad real.

29. Francia. Felipe el Atrevido. Reinado de Felipe el Hermoso.—Traslación de la Santa Sede á Aviñón. Cisma de Occidente. Administración de Felipe el Hermoso. Los hijos de Felipe el Hermoso; la ley sálica.

30. Guerra de Cien Años: períodos de esta guerra. Primer período: Felipe VI de Valois; Juan el Bueno. Esteban Marcel; los estados generales de 1356. La Jacquería. Tratado de Bretigny. Reinado de Carlos V. Menor edad de Carlos VI. Armagnacs y Borgoñones.

31. Segundo período de la guerra de Cien Años. Enrique V. Tratado de Troyes. La Francia inglesa; Enrique VI y Carlos VII. Juana de Arco; su infancia. Juana de Arco en Orleans. Victoria de Patay: consagración de Carlos VII. Prisión y muerte de Juana de Arco. Paz de Arras; fin de la lucha entre Armagnacs y Borgoñones. Conquista de la Normandía y de la Guyena. Resultados de la guerra de Cien Años; instituciones de Carlos VII.

32. Inglaterra: los Lancaster. Guerra civil de las Dos Rosas. Alemania: el largo interregno. Rodulfo de Hapsburgo. Casa de Luxemburgo; Bula de Oro. Los Husitas. La corona imperial pasa á la Casa de Austria. Suiza; Guillermo Tell. Emancipación de Suiza.

33. Italia. Reino de Nápoles. Roma. Repúblicas italianas: Florencia, Génova, Venecia. Actividad industrial de las ciudades italianas. Letras y Artes.

34. El Imperio griego á fines de la Edad Media. Los Turcos, Otmán. Los Turcos en Europa. Invasión de los Mogoles. Tamerlán. Mahomet II; toma de Constantinopla. Consecuencias de la toma de Constantinopla.

35. Resumen. Confusión social producida por las invasiones de los pueblos bárbaros. El Cristianismo. La Iglesia concilios; dominación del Papado. La Monarquía. El Feudalismo. Principios del libre examen. Los municipios. Limitaciones del poder real; el Parlamento en Inglaterra. La vida intelectual en la Edad Media. La Literatura, la Arquitectura.

SEGUNDA ENSEÑANZA.

SEGUNDO AÑO.

Ciencias y Letras.

Programa de Latín.

1. Observaciones sobre los adjetivos relativos *quantus, qualis, quot: Si laenitas tua tanta non esset, quanta per te obtines, acerbissimo luctu redundaret ista victoria: Europam Xerxes cum tantis copiis invasit, quantas neque antea, neque postea habuit quisquam: Qualis vita, talis mors: Tale tuum carmen nobis, divine poëta, quale sopor fessis; Quot sunt captivi permutandi?* Trad. *Curso práctico de Latinidad*, por R. Miguel: Máximas y Sentencias, pág. 124 á 127.

2. Sobre los adjetivos demostrativos *hic, iste, ille: Caesar beneficiis ac munificencia magnus habebatur, integritate vitae Cato: ille mansuetudine ac misericordia clarus factus, huic severitas dignitatem addiderat: illius facilitas, hujus constantia laudabatur.* A qué equivale el neutro *hoc* precedido de *ad: Cognoverat parvis copiis bella gesta cum opulentis regibus;* ad hoc *saepe fortunae violentiam tolerasse.* Trad. Id. pág. 128 á 132.

3. Observaciones sobre los demostrativos *Ipse, is, idem: Etsi egomet, qui te consolari cupio, consolandus ipse sum.* Correspondencia de *is* seguido de relativo. Cuándo se traduce por *este: Aulo Trebonio utor balde familiariter: is gratiosissimus in provincia fuit.* Traducción de *is* cuando le sigue *ut: Ea est hominum conditio ut nemo sua sorte sit contentus.* Trad. Anécdotas, pág. 133 á 136.

4. Observaciones sobre los adjetivos *quis, qui: Quis talia fando temperet a lacrymis? Quis non inscius fati? Quis non eam victoriam probet.* Diferencia entre *quis* y *qui* cuando se refieren á un sustantivo: *Tu quis es? Qui sis plane novi.* Diferencia entre quid y quod: *Quid cupiebas? quid optabas? Quod facinus a manibus unquam tuis, quod flagitium a toto corpore abfuit?* Trad. pág. 137 á 139.